

أولاً: أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية: (40 درجة لكل سؤال)

x	-1	2	5	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +		+
$f(x)$	3	\searrow -1 \nearrow	\nearrow $+\infty$	\nearrow 5

السؤال الأول: بفرض f تابع معرف على D ،

جدول تغيراته معطى كما يلي:

(1) عيّن D_f و $D_{f'}$

(2) هل $f(-1)$ قيمة حدية محلياً؟ علل ذلك

(3) ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 2$

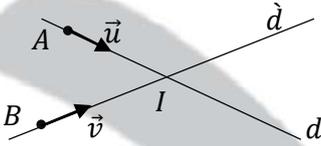
(4) أوجد $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x))$

السؤال الثاني: في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ لدينا النقطتان $B(4, 3, -1), A(-1, 0, -1)$

والشعاغان $\vec{u}(0, -1, -2), \vec{v}(-5, -2, 2)$ هو المستقيم المار بالنقطة A والموجه بالشعاع \vec{u}

و \vec{d} هو المستقيم المار بالنقطة B والموجه بالشعاع \vec{v} .

أثبت أن المستقيمين d, \vec{d} متقاطعان



السؤال الثالث: ما هي أمثال الحد x^2y في منشور $\left(\frac{y^2}{x} + \frac{x}{y}\right)^8$ ؟

السؤال الرابع: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $[0, +\infty[$ وفق: $f(x) = x + \ln(x+1) - \ln x$

1. احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2. أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y = x$ مقارب في جوار $+\infty$ و ادرس الوضع النسبي لـ C مع Δ

ثانياً: حل التمارين الأربعة الآتية: (60 درجة لكل تمرين)

التمرين الأول: ليكن لدينا المتتالية المعرفة بالعلاقة التدرجية:

$$\begin{cases} u_0 = \frac{3}{2} \\ u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{-u_n + 4} \end{cases}$$

(1) أثبت بالتدرج أن $1 \leq u_n \leq 2$ أيّاً يكن n

(2) ادرس اطراد المتتالية. ماذا تستنتج؟

التمرين الثاني: في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ لدينا النقاط: $A(2, 1, -3), B(0, -1, 2), C(-3, -1, -1)$

(1) تبين أن النقط A, B, C تعين مستوي ثم بين أن المعادلة $2x - 7y - 2z - 3 = 0$

هي معادلة المستوي (ABC)

(2) أوجد معادلة المستوي P المار من A ويعامد المستقيم (BC)

(3) جد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d الذي يمثل تقاطع المستويين (ABC) و P

ثم بين أن المستويين (ABC) و P متعامدين

التمرين الثالث: ليكن $g(x) = \tan x$ ، و المطلوب :

(1) احسب $g\left(\frac{\pi}{4}\right)$ ، $g'(x)$ ، $g'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ ، ثم استنتج $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$

(2) احسب مشتق التابع $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$ على $R \setminus \{0\}$.

التمرين الرابع: نريد تأليف لجنة مكونة من (مدير ونائب مدير وأمين سر) من مجموعة تضم خمسة أشخاص. بكم طريقة يمكن اختيار هذه اللجنة علماً بأن في المجموعة شخصين متخصصين لا يجتمعان في اللجنة ذاتها.

ثالثاً: حل المسألتين الآتيتين: (100 درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى: ليكن لدينا مجموعة الأعداد العقدية كثيرة الحدود $P(Z)$ حيث:

$$P(Z) = Z^3 - 12Z^2 + 48Z - 72$$

(1) تحقق أن $Z = 6$ هو أحد جذور كثير الحدود $P(Z)$

(2) جد العددين الحقيقيين a, b بحيث تكون $P(Z) = (Z - 6)(Z^2 + aZ + b)$

(3) حل في C المعادلة $P(Z) = 0$

(4) بفرض A, B, C نقاط في المستوي العقدي $(O; \vec{u}, \vec{v})$ تمثل الأعداد العقدية

$$Z_A = 6, \quad Z_B = 3 + \sqrt{3}i, \quad Z_C = 3 - \sqrt{3}i$$

اكتب $w = \frac{Z_A - Z_B}{Z_A - Z_C}$ بالشكل الجبري ثم بالشكل الأسّي ، واستنتج طبيعة المثلث ABC

(5) أوجد B' صورة النقطة B وفق تحاكي مركزه C نسبته $\sqrt{3}$

(6) أوجد A' صورة النقطة A وفق دوران مركزه C زاويته $\frac{\pi}{2}$

(7) ما العلاقات التي تربط الأعداد العقدية الممثلة للشعاعين \vec{AB} ، $\vec{A'B'}$

واستنتج أن $AB \perp A'B'$ وأن $AB = A'B'$

المسألة الثانية: بفرض C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق: $f(x) = (ax + b)e^{-x} + 1$

أولاً: عين a, b ليكون مماس الخط C في النقطة $A(-1, 1)$ يوازي المستقيم $y + ex - 2 = 0$

ثانياً: بفرض $a = -1$ ، $b = -1$ عندئذ $f(x) = (-x - 1)e^{-x} + 1$ والمطلوب:

(1) بيّن أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ وادرس وضع الخط C مع المقارب $y = 1$

(2) ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها

(3) أثبت أن للمعادلة $f(x) = 0$ جذراً وحيداً في R

(4) ارسم C ثم استنتج رسم C_1 الخط البياني للتابع $f_1(x) = \frac{1-x}{e^{-x}} - 1$

..... تأسست ١٩٥٤

- انتهت الأسئلة -